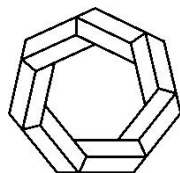


# 2019 WMTTC

## 青年组个人赛第一轮

### Advanced Level Individual Round 1

1. 已知函数  $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4-x}$ , 则  $f(x)$  的最小值是\_\_\_\_\_.
2. 已知集合  $P = \{(x, y) | (x - \cos \theta)^2 + |y - \sin \theta - 2| = 0, \theta \in \mathbf{R}\}$ ,  
 $Q = \{(x, y) | y = kx + 5, k < 0\}$ , 若  $P \cap Q$  是单元素集合, 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
3. 已知  $\{a_n\}$  是等比数列,  $a_3 = \sqrt{5}$ ,  $a_4 = \sqrt[3]{7}$ , 则  $\frac{a_1 + a_{2014}}{a_7 + a_{2020}} =$ \_\_\_\_\_.
4. 已知正数  $x$  满足  $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|x - \frac{1}{3}\right| + \left|x - \frac{1}{6}\right| = 1$ , 则  $x =$ \_\_\_\_\_.
5. 设  $a_1 = 7$ ,  $a_{n+1} = \left[ a_n + \sqrt{a_n^2 - 3} \right]$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 则  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2019}$  的个位数字是\_\_\_\_\_.
6. 已知  $P(x, y)$  是直线  $x + 3y - 9 = 0$  上一点, 则  $2 \cdot 3^x + 9^y$  的最小值是\_\_\_\_\_.
7. 将从小到大排列的正奇数集合  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$  进行分组, 其中第  $n$  组有  $2n-1$  个数:  $\{1\}$ ,  $\{3, 5, 7\}$ ,  $\{9, 11, 13, 15, 17\}$ ,  $\dots$ , 则 2019 位于第\_\_\_\_\_组.
8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l: mx + y + 3m - \sqrt{3} = 0$  与圆  $x^2 + y^2 = 16$  交于  $A, B$  两点, 从  $A, B$  分别作  $l$  的垂线与  $x$  轴交于  $C, D$  两点. 若  $AB = 2\sqrt{7}$ , 则  $CD =$ \_\_\_\_\_.

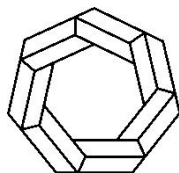


# 2019 WMTTC

## 青年组个人赛第二轮

### Advanced Level Individual Round 2

9. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_4 = 7$ ,  $S_6 = 36$ , 则数列  $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$  的前 2019 项的和是\_\_\_\_\_.
10. 若正整数  $a, b$  满足  $\begin{cases} 2ab + b^2 = 45, \\ ab^2 = 54, \end{cases}$  则  $a + b =$ \_\_\_\_\_.
11. 已知正数  $a, b, c, d, \lambda$  满足  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ , 且  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq \lambda abcd$ , 则  $\lambda$  的最大值是\_\_\_\_\_.
12. 已知抛物线  $E: x^2 = 2py (p > 0)$  的焦点  $F$  恰好在直线  $l: y = 2x + 1$  上, 若  $E$  上的点  $M$  关于  $l$  的对称点  $N$  恰好在射线  $y = 6 (x \leq 4)$  上, 则直线  $FM$  被  $E$  截得的弦长是\_\_\_\_\_.



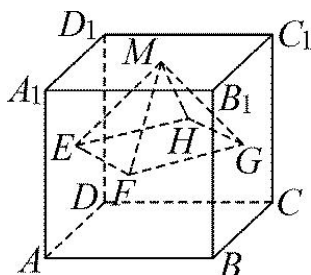
# 2019 WMTTC

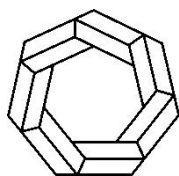
## 青年组个人赛第三轮

### Advanced Level Individual Round 3

13. 由公差不为 0 的等差数列  $\{a_n\}$  中的部分项组成的数列  $\{a_{k_n}\}$  是等比数列, 其中  $k_1=1$ ,  $k_2=5$ ,  $k_3=21$ , 则  $3k_{2019}+1=$ \_\_\_\_\_.

14. 如图, 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的外接球的体积是  $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ , 若正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  除面  $ABCD$  外的其余各面的中心分别为点  $E, F, G, H, M$ , 则四棱锥  $M-EFGH$  内切球的半径是\_\_\_\_\_.

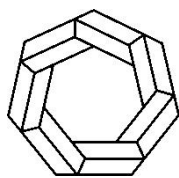




**2019 WMTTC**  
**青年组接力赛第一轮**  
Advanced Level Relay Round 1

# 1-A

已知函数  $f(x) = \log_2 \frac{\sqrt{2}x}{1-x}$ , 记  $S(n) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ , 则  $S(101) = \underline{\hspace{2cm}}$ .



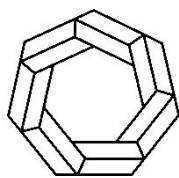
**2019 WMTTC**  
**青年组接力赛第一轮**  
Advanced Level Relay Round 1

# 1-B

设前面队友传来的答案是  $\mathbf{T}$ .

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} - a_n^2 + a_n = 1$ , 若  $a_{2020} - a_1 = \mathbf{T}$ , 则

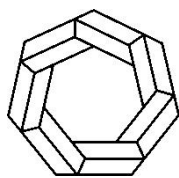
$$(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 1)^2 + \cdots + (a_{2019} - 1)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$



**2019 WMTTC**  
**青年组接力赛第二轮**  
Advanced Level Relay Round 2

# 2-A

已知正实数  $a, b$  满足  $3a+b=4$ , 则  $a(a+b)$  的最大值是\_\_\_\_\_.

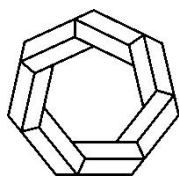


**2019 WMTTC**  
**青年组接力赛第二轮**  
Advanced Level Relay Round 2

# 2-B

设前面队友传来的答案是  $T$ .

已知  $\triangle ABC$  中,  $AB=T$ ,  $AC=2BC$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值是\_\_\_\_\_.

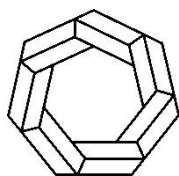


**2019 WMTTC**  
**青年组接力赛第三轮**  
Advanced Level Relay Round 3

**3-A**

方程  $(x-1)^3 + (x-3)^3 + (x-5)^3 + (x-7)^3 = 0$  的实数解是  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .



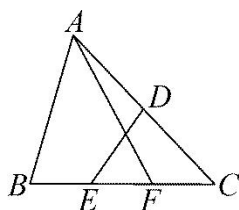


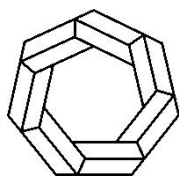
**2019 WMTTC**  
**青年组接力赛第三轮**  
Advanced Level Relay Round 3

# 3-B

设前面队友传来的答案是 **T**.

如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB=3$ ,  $AC=T$ ,  $\angle BAC=60^\circ$ ,  $D$  是  $AC$  的中点,  $E, F$  是  $BC$  的两个三等分点, 则  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} =$  \_\_\_\_\_.





# 2019 WMTTC

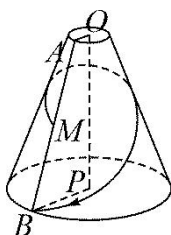
## 青年组团体赛

### Advanced Level Team Round

1. 已知  $\{a_n\}$  是首项为 8, 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列, 则从该数列的前 5 项中任取 2 项, 其中恰好只有 1 项是整数的概率是\_\_\_\_\_.
2. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n - 1} + 1$ , 则  $a_{11} =$ \_\_\_\_\_.
3. 一个长方体的体对角线长为 13, 这条对角线在该长方体底面上的投影的长为 5, 则这个长方体表面积的最大值是\_\_\_\_\_.
4. 设  $x, y, z > 0, xyz(x+y+z) = 9$ , 则  $(x+y)^2 + 4(y+z)^2 + (z+x)^2$  的最小值是\_\_\_\_\_.
5. 定义:  $u(n)$  表示自然数  $n$  的个位数字, 如  $u(2019) = 9$ . 记  $a_n = u(3n) - u(n)$ , 则  $\sum_{i=1}^{2019} a_i =$ \_\_\_\_\_.
6. 使  $p^2 + 11pq + 25q^2$  为完全平方数的质数对  $(p, q)$  的个数是\_\_\_\_\_.
7. 已知  $f(x) = 2x^3 + 5x^5 (x \in \mathbf{R}), g(x) = f(x-7)$ , 数列  $\{a_n\}$  是公差不为 0 的等差数列. 若  $g(a_1) + g(a_{11}) = 0$ , 则  $a_1 + a_2 + \dots + a_{11} =$ \_\_\_\_\_.
8. 记面积为  $\frac{1}{4}$  的  $\triangle ABC$  的三边长分别为  $a, b, c$ . 当  $2b+c$  取得最小值时,  $\triangle ABC$  的周长是\_\_\_\_\_.

9. 已知正数  $a, b, c$  满足  $ab+bc+ca=45$ ,  $abc=50$ , 则  $a+b+c$  的最小值是\_\_\_\_\_.

10. 如图, 圆台的上底半径为 1, 下底半径为 4, 母线为 18. 若一只蚂蚁从母线  $AB$  的中点  $M$  绕圆台侧面转一周到点  $B$ , 则蚂蚁所走的最短路径长是\_\_\_\_\_.



11. 若正整数  $n$  满足  $a_1+a_2+\dots+a_n=n^3$ , 则  $\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\dots+\frac{1}{a_{2020}-1}=\underline{\hspace{2cm}}$ .

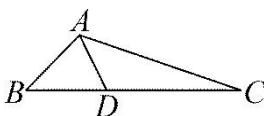
12. 当  $x>0$  时,  $[(a-3)x-3](3x^2-ax-3)\geq 0$  恒成立, 则  $a=\underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 已知正整数  $a, b, c$  成等比数列,  $b-c$  是个完全平方数, 且  $\log_{12} a+\log_{12} b+\log_{12} c=6$ , 则  $a+b+c$  的最大值是\_\_\_\_\_.

14. 双曲线  $C_1:xy=5$  的切线  $l$  与双曲线  $C_2:xy=3$  相交于  $A, B$  两点, 则  $|AB|$  的最小值是\_\_\_\_\_.

15. 在边长为 3 的等边三角形  $ABC$  中,  $E$  是  $BC$  边上一点, 且  $BE=1$ ,  $F$  是  $AE$  上一点,  $BF$  的延长线交  $AC$  于点  $D$ , 设  $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{DC}$ , 则当  $|\overrightarrow{CF}|$  最小时,  $\lambda=\underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 如图,  $D$  是  $\triangle ABC$  的边  $BC$  上一点,  $AB=2\sqrt{2}$ ,  $BD=3$ ,  $\cos \angle BAD = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ,  $\angle DAC = \frac{\pi}{4}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积是\_\_\_\_\_.



17. 已知  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $\frac{(\tan \theta + \cot \theta)^4}{\sqrt[3]{\tan^3 \theta + \cot^3 \theta}}$  的最小值是\_\_\_\_\_.

18. 已知函数  $f(x) = \cos \pi x + 2x - \frac{e^2}{2x-1} - 1$  有 2 个零点  $x_1, x_2$ , 则  $x_1 + x_2 =$ \_\_\_\_\_.

19. 已知  $\triangle ABC$  中,  $\sin A + \sin B + \sqrt{6} \sin C$  的最大值是\_\_\_\_\_.

20. 已知正数  $x, y$  满足  $\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x \leq 0, \\ \frac{y^2}{2} - x^2 \geq 1. \end{cases}$  则  $\frac{x^4 + y^3}{3xy + y + 1}$  的最小值

是\_\_\_\_\_.

# 2019WMTC 青年组·参考答案

## 个人赛

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	-2	$-2\sqrt{2}$	$\frac{125}{49}$	$\frac{2}{3}$	1	135	32
题号	8	9	10	11	12	13	14
答案	$\frac{4\sqrt{21}}{3}$	$\frac{2019}{4039}$	9	$4\sqrt{3}$	$\frac{25}{4}$	$4^{2019}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

## 接力赛

题号	1-B	2-B	3-B
答案	50	$\frac{4}{3}$	$\frac{23}{9}$

## 团体赛

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	$\frac{2}{5}$	101	$25+120\sqrt{2}$	36	0	3	77	$\frac{\sqrt{5}+3}{2}$	12	21
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	$\frac{673}{2020}$	$\frac{9}{2}$	444	4	2	8	$8\sqrt[3]{4}$	1	$\frac{5}{4}\sqrt{10}$	1

