

2018 WMTTC

青年组个人赛第一轮

Advanced Level Individual Round 1

1. 若集合 $A = \{x \mid |x| \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid -x \in A, 2 - x^2 \notin A\}$, 则 $B = \{\underline{\hspace{2cm}}\}$.
2. 已知 $3^a = 5$, $5^b = 7$, $7^c = 9$, 则 $abc = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 如 $[2] = 2, [-3.1] = -4, [\pi] = 3$. 则 $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{150}] = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A + \tan C + \sqrt{3} = \sqrt{3} \tan A \tan C$, 则 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ 度.
5. 设 $y = f(x)$ 是偶函数, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) = -f(x+4) + 1$ 成立, 则 $f(2018) = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$, $a_{2018} = 1$, 则 $a_{2000} = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 设向量 $m = \lambda \overrightarrow{AC} - 3 \overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), 其中向量 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} 在 5×4 的网格图中的位置如图 1 所示. 若 $m \perp \overrightarrow{AB}$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

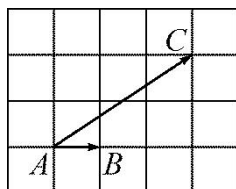


图 1

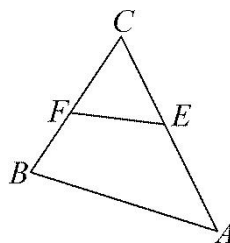
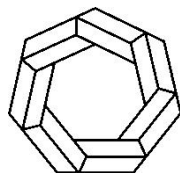


图 2

8. 如图 2, $\triangle ABC$ 中, $AC = 8$, $BC = 6$, $\angle C = 60^\circ$, E 、 F 分别在边 AC 、 BC 上. 若 $S_{\triangle CEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, 则 EF 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



2018 WMTTC

青年组个人赛第二轮

Advanced Level Individual Round 2

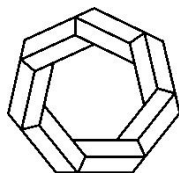
9. 若 $(x^2 - 2x + \sqrt{3})^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8$, 则

$$(a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8)^2 - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

10. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2$, $AA_1 = \sqrt{5}$. 记异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角为 θ , 则 $\cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_6 + a_7 + a_{12} = 51$, $a_3 : a_{12} = 1 : 2$, 则 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{98} + a_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin^3 \theta - \cos^2 \theta - \sin \theta$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



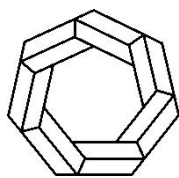
2018 WMTTC

青年组个人赛第三轮

Advanced Level Individual Round 3

13. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个焦点, 并且 C 的一条渐近线与直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 垂直. 若 C 上的一点 A 满足 $F_1A = \frac{3}{2}F_2A$, 则 $\cos \angle AF_1F_2 =$ _____.

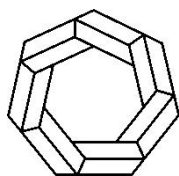
14. 函数 $f(x) = \sqrt{a - a^x}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域和值域都是 $[0, 1]$. 若正四面体 $ABCD$ 的边长为 a , 则该四面体的外接球的半径的值等于 _____.



2018 WMTTC
青年组接力赛第一轮
Advanced Level Relay Round 1

1-A

若对任意实数 x ，不等式 $\log_a(3+e^{|x|}) \geq \frac{1}{2}$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____.

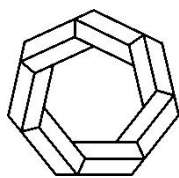


2018 WMTC
青年组接力赛第一轮
Advanced Level Relay Round 1

1-B

设前面队友传来的答案是 \mathbf{T} .

当 $a \in \mathbf{T}$ 时, 解关于 x 的不等式 $2\log_a(x+1) < \log_a 2 + \log_a(3-x)$.

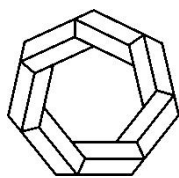


2018 WMTC
青年组接力赛第二轮
Advanced Level Relay Round 2

2-A

已知 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, 则

$$f(-6) + f(-4) + f(-2) + f(2) + f(4) + f(6) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

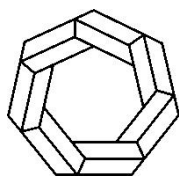


2018 WMTTC
青年组接力赛第二轮
Advanced Level Relay Round 2

2-B

设前面队友传来的答案是 T .

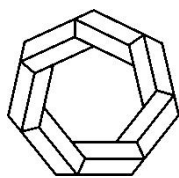
已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = T$, 则 $\frac{a^2}{a+5} + \frac{b^2}{b+3}$ 的最小值是_____.



2018 WMTTC
青年组接力赛第三轮
Advanced Level Relay Round 3

3-A

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 且 $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$, 则 $a_{101} =$ _____.

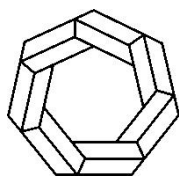


2018 WMTTC
青年组接力赛第三轮
Advanced Level Relay Round 3

3-B

设前面队友传来的答案是 T .

若 $\tan \alpha = T \tan \frac{\pi}{7}$, 则 $\frac{\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{14}\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{7}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}$.



2018 WMTTC

青年组团体赛

Advanced Level Team Round

1. 已知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$, 则 $f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{2018}{2019}\right) =$ _____.
2. 已知 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $x^2 + 4xy - y^2$ 的最大值为 _____.
3. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid xy \geq 1, x > 0\}$, $B = \{(x, y) \mid x + 4y \leq a\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 a 的取值范围是 _____.
4. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 记 $M = \max\{1 - 2x, 5x - 3, 2x\}$, 则 M 的最小值等于 _____.
5. 方程 $\frac{3}{3^x - 1} + \frac{1}{3} = 3^{x-1}$ 的实数解为 $x =$ _____.
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $b - c = \frac{1}{4}a$, $2\sin B = 3\sin C$, 则 $\cos A$ 的值为 _____.
7. 已知点 $P \in \{(x, y) \mid |x - 1| + |y| = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 则满足条件的点 P 在平面上组成的图形的面积是 _____.
8. 方程 $\sqrt{4 - x^2} - |\ln|x - 1|| = 0$ 的解的个数为 _____.
9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n - a_{n+1} = 6a_n a_{n+1}$, $a_3 = \frac{1}{15}$, 则 $a_n =$ _____.
10. 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 若 $GB \perp GC$, $BC = \sqrt{2}$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, O 为 BC 的中点, $AB=10$, $AC=7$, $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$,

$\overrightarrow{AN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$, 则 $\cos A =$ _____.

12. 半径为 4 的球面上有 A, B, C, D 四点, 且满足 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle CAD = 90^\circ$, $\angle DAB = 90^\circ$, 若 S 表示三角形的面积, 则 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ADB}$ 的最大值为 _____.

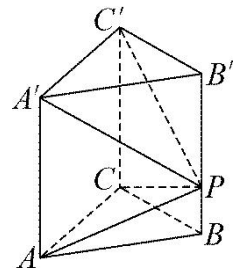
13. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-7 \leq 0 \\ x-3y+1 \leq 0 \\ 3x-y-5 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = \frac{(y-x)(y+x)}{xy}$ 的取值

范围是 _____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长 a, b, c 满足 bc, ca, ab 成等差数列. 若 $a+c=4$, 则当 $\triangle ABC$ 的面积取得最大值时, $\triangle ABC$ 的周长为 _____.

15. 若实数 m, n, x, y 满足 $m^2 + n^2 = 20$, $x^2 + y^2 = 18$, 则 $mx - ny$ 的最大值是 _____.

16. 如图, 三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 的体积为 1, $P \in B'B$, 则四棱锥 $P - ACC'A'$ 的体积为 _____.



17. 方程 $x^6 - x^3 + 1 = (x^6 + x^3 + 1)(x^2 + 2x + 4)$ 的所有实根的和是 _____.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = 5$, $AC = 8$. 若 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, 且 $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ($m, n \in \mathbf{R}$), 则 $\frac{m}{n} =$ _____.

19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $S_m = -2$, $S_{m+1} = 0$, $S_{m+2} = 3$, 则 $a_{2018} =$ _____.

20. 已知 $f(x) = x^2 + 2x - 1$ 的定义域和值域都是 $[a, b]$, 则 $a+b$ 的最小值是 _____.

2018WMTC 青年组 · 参考答案

个人赛

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	-3,3	2	1162	60	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{35}$	1
题号	8	9	10	11	12	13	14
答案	4	144	$\frac{\sqrt{13}}{39}$	2850	$-\frac{32}{27}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$

接力赛

题号	1-B	2-B	3-B
答案	(-1,1)	$\frac{9}{11}$	2

团体赛

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	1009	$\sqrt{5}$	$(-\infty, 4)$	$\frac{1}{2}$	$\log_3 4$	$-\frac{1}{4}$	4	4	$\frac{1}{6n-3}$	$\frac{3}{2}$
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	$\frac{3}{8}$	32	$\left[-\frac{21}{10}, \frac{7}{12}\right]$	6	$6\sqrt{10}$	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{8}{5}$	2015	-3