

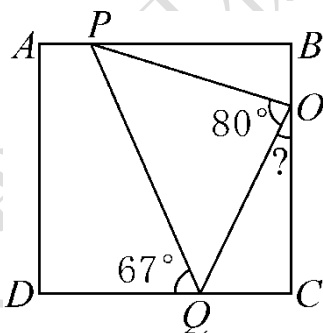
2017 WMTTC

少年组个人赛第一轮

Intermediate Level Individual Round 1

1. 若 $x = \sqrt{3}$, $y = \sqrt{2}$, 求 $(xy)^2$, $(x-y)^{-2}$, $\frac{x}{x-y}$ 中的最大值.

2. 如图, 点 O, P, Q 在正方形 $ABCD$ 的边上, 若 $OP=OQ$, $\angle POQ=80^\circ$, $\angle PQD=67^\circ$, 求 $\angle QOC$.

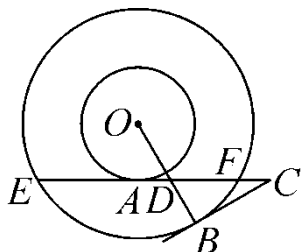


3. 记 $\sqrt{63}$ 的整数部分是 m , 小数部分是 n ; $\sqrt{28}$ 的整数部分是 p , 小数部分是 q , 求 $mp - nq$ 的值.

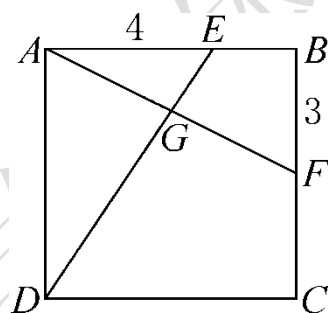
4. 计算: $(\sqrt{5}+1)^{2017} - 2(\sqrt{5}+1)^{2016} - 4(\sqrt{5}+1)^{2015} + 2014$.

5. 如果 x, y 是正整数, 且 $2x + y = 20$, 求 $\frac{y}{x}$ 的最大值.

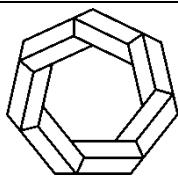
6. 如图，两个同心圆的圆心是 O ，半径分别是 r 和 $2r$ ，大圆的弦 EF 切小圆于点 A ，点 C 在 EF 的延长线上， CB 是大圆的切线， OB 交 AF 于点 D 。若 $\angle DCB=30^\circ$ ，求 $\frac{OD}{ED}$ 。



7. 正方形 $ABCD$ 的边长为 6，点 E, F 分别在 AB, BC 上， AF 与 DE 交于点 G 。若 $AE=4, BF=3$ ，求四边形 $DGFC$ 的面积。



8. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中取出九个数字，组成一个两位数，一个三位数和一个四位数，如果这三个数的和等于 2017，求没有取的数字。

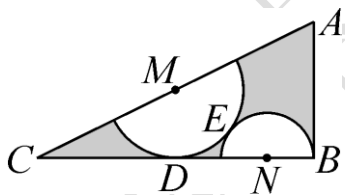


2017 WMTTC

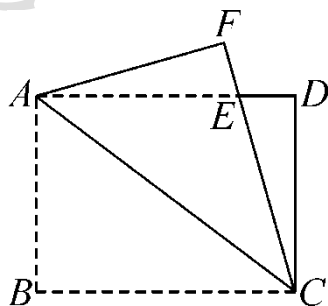
少年组个人赛第二轮

Intermediate Level Individual Round 2

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, M 是 AC 的中点, 半圆 M 与 BC 切于点 D , 半圆 N 经过点 B , 且与半圆 M 切于点 E . 若 $AB=4$, $CB=8$, 求阴影部分的面积. (圆周率 π 取3)

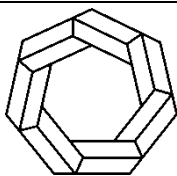


10. 如图, 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB=3$, $BC=4$, 将矩形沿直线 AC 折叠, 点 B 落在点 F , CF 与 AD 相交于点 E , 求 $\triangle ACE$ 的面积.



11. 若关于 x 的一元二次不等式 $6x^2 - ax - a^2 < 0$ 恰有7个整数解, 求正整数 a .

12. 已知非零实数 a, b, c 满足 $\begin{cases} 2a - 2b + 9c = 9, \\ a - 2b + 6c = 5, \end{cases}$ 求 $\frac{a+3c}{a+4b-3c}$ 的值.



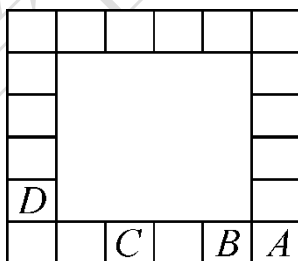
2017 WMTTC

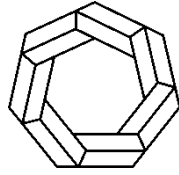
少年组个人赛第三轮

Intermediate Level Individual Round 3

13. 已知 a , b , c 都是正整数, 且 $abc+ab+bc+ac+a+b+c=3144$, 求 $a+b+c$.

14. 如图, 20 个同样的方格组成一条环形小路, 小明从 A 格出发, 他第一次走一格到达 B , 第二次走两格到达 C , 第三次走三格到达 D , \dots , 按此规律走下去, 他第几次走完时刚好第 3 次回到 A ?





2017 WMTTC

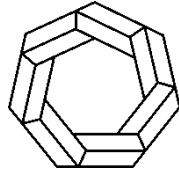
少年组接力赛第一轮

Intermediate Level Relay Round 1

1-A

若正整数 x 和 y 满足 $2^x + 3^y = 59$ ，求 xy 。

世界数学团体锦标赛



2017 WMTTC

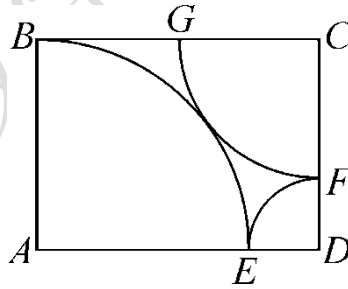
少年组接力赛第一轮

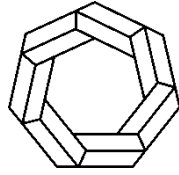
Intermediate Level Relay Round 1

1-B

设前面队友传来的答案是 T .

在长方形 $ABCD$ 中, $AB=T$, 以 A 为圆心, AB 长为半径的弧交 AD 于点 E , 以 D 为圆心, DE 长为半径的弧交 CD 于点 F , 以 C 为圆心, CF 长为半径的弧与弧 BE 相切, 求 BC 的长.





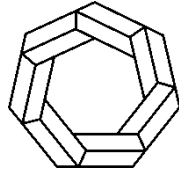
2017 WMTTC

少年组接力赛第二轮

Intermediate Level Relay Round 2

2-A

已知 A, B, C 是实数, 若 $\frac{2x^2+1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ 恒成立, 求 $(A-3B+C)^2$ 的值.



2017 WMTTC

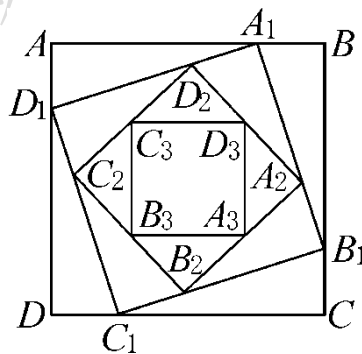
少年组接力赛第二轮

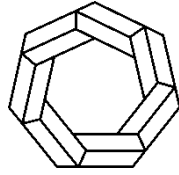
Intermediate Level Relay Round 2

2-B

设前面队友传来的答案是 T .

如图, 点 A_1, B_1, C_1, D_1 分别是正方形 $ABCD$ 各边上的四等分点, 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 各边上的三等分点, 点 A_3, B_3, C_3, D_3 分别是正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 各边上的中点. 若 $AB=T$, 求四边形 $A_3B_3C_3D_3$ 的面积.





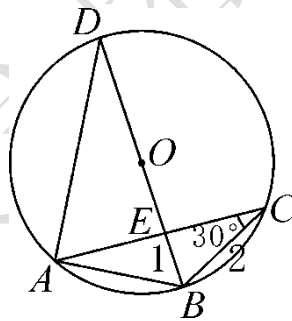
2017 WMTTC

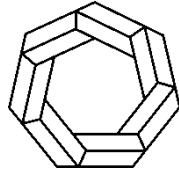
少年组接力赛第三轮

Intermediate Level Relay Round 3

3-A

如图， BD 是 $\odot O$ 的直径，点 A, C 在 $\odot O$ 上， BD 与 AC 交于点 E 。若 $BC=2$ ， $BE=1$ ， $\angle ACB=30^\circ$ ，求 AD 的长。





2017 WMTTC

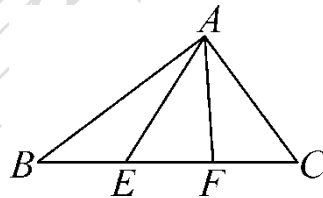
少年组接力赛第三轮

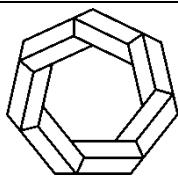
Intermediate Level Relay Round 3

3-B

设前面队友传来的答案是 T .

如图, E, F 是 $\text{Rt}\triangle BAC$ 的斜边 BC 上的三等分点, 若 $BC=T$, 求 $AE^2 + AF^2$ 的值.





2017 WMTTC

少年组团体赛

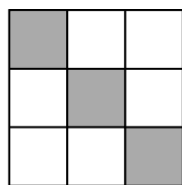
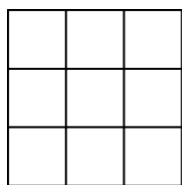
Intermediate Level Team Round

1. 已知四边形 $ABCD$ 的四个内角 A, B, C, D 满足 $A > B > C > D$. 用 α 表示 $A - B, B - C, C - D$, 以及 $115^\circ - A$ 中的最小者, 求 α 的最大值.

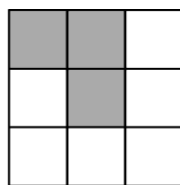
2. 已知实数 a, b 满足 $|2a - 1| + \sqrt{(a - 2)b^2} + \sqrt{b + 4} + 1 = 2a$, 求 $a^2b + ab^2$ 的值.

3. 已知 $xy \neq 1, 19x^2 + 2017x + 5 = 0, 5y^2 + 2017y + 19 = 0$, 求 $\frac{x}{xy + 1}$ 的值.

4. 在 3×3 的网格图中, 选出 3 个 1×1 的网格涂上阴影, 求所得图形是轴对称图形的概率. (如下图: (1) 是轴对称图形, (2) 不是轴对称图形)



(1)



(2)

5.若图 1 中任意如图 2 所示的三个圆中的数字都满足： $x = \sqrt{2}y + z$ ，

求 A.

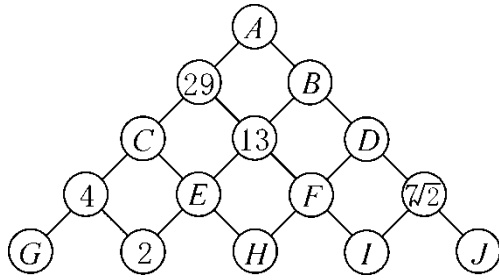


图 1

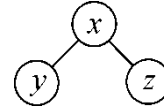
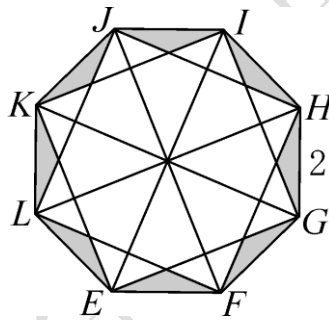
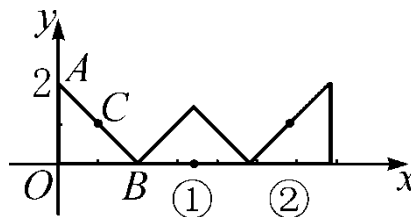


图 2

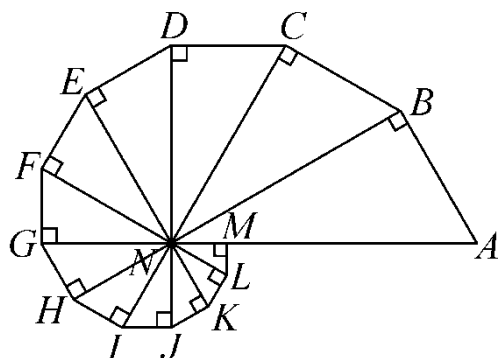
6.如图， $EFGHIJKL$ 是一个边长为 2 的正八边形，求图中阴影部分的面积.



7.如图，把等腰直角 $\triangle AOB$ 置于平面直角坐标系中， O 是坐标原点， $OB=2$ ， C 是斜边 AB 的中点，现将 $\triangle AOB$ 沿着 x 轴无滑动地向右滚动，第一次滚动至图①位置，第二次滚动至图②位置...，当连续滚动 2017 次后，求点 C 的坐标.



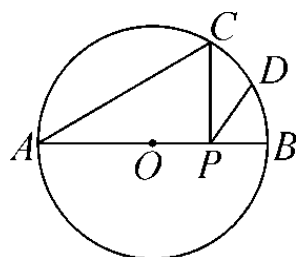
8.如图,是由12个相似的直角三角形拼成的,其中,公共顶点 N 是对应顶点,若 $ML=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{11}$,求 AB 的长.



9.已知 m, n 都是正整数, 5^m 和 4^n 的乘积是一个28位数,若 $m > 25$,求 $m+n$ 的值.

10.直角梯形有三条边的长是6, 6, 8, 求此梯形的面积的最小值.

11.如图, AB 是 $\odot O$ 的直径,点 C 在 $\odot O$ 上, $\angle CAB = 30^\circ$, D 是 CB 的中点, P 是 AB 上的动点,若 $PC+PD$ 的最小值是1,求 $\odot O$ 的半径长.



12.已知 n 是正整数,并且 $(n+1)^3 - n^3 \leq 2017$,求 n 的最大值.

13.已知互不相同的非零一位数 A, B, C 满足 $\overline{ABAA} = \overline{BA} \times \overline{CAB}$,求 \overline{CAB} .

14.若实数 x, y, z 满足 $4(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-8}) = x+y+z$,求

$x+2y-3z$ 的值.

15. 已知 a 和 b 都是正整数, 若直线 $y=a-x$ 和曲线 $y=\frac{b}{x}$ 围成的封闭区域中 (不包括边界), 横纵坐标都是正整数的点恰有 123 个, 求 $a+b$ 的最小值.

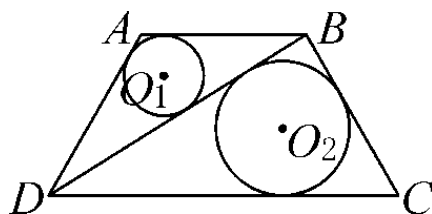
16. 解方程 $\sqrt[3]{190-x} + \sqrt[3]{27+x} = 7$ ($x>0$).

17. 若 $(\sqrt{x} - \sqrt{x-2018})(\sqrt{y} - \sqrt{y-2018}) = 2018$, 求 $4x^2 - 4y^2 + 5x - 4y - 2017$ 的值.

18. 若质数 a, b 满足 $8(2a+3b)^2 = 127(21a+349b)$, 求 $a+b$ 的值.

19. 已知 $\sqrt{68+a}, \sqrt{68-a}$ 都是有理数, 求正整数 a .

20. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle C = 60^\circ$, 圆 O_1 和圆 O_2 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的内切圆, 半径分别是 3, 5, 求梯形的高.



2017WMTC 少年组 · 参考答案

个人赛

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	$5+2\sqrt{6}$	27°	$29\sqrt{7}-42$	2014	18	$\frac{1}{2}$	18
题号	8	9	10	11	12	13	14
答案	8	$\frac{22}{3}$	$\frac{75}{16}$	9	2	56	39

接力赛

题号	1-B	2-B	3-B
答案	20	$\frac{25}{9}$	$\frac{20}{3}$

团体赛

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10°	16	$-\frac{5}{2017}$	$\frac{3}{7}$	$54\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$ -8	$(1345\sqrt{2} + 2690, 0)$	1	41 或 42	$36-6\sqrt{7}$
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	25	153	-17	27	189	1	288	32	12