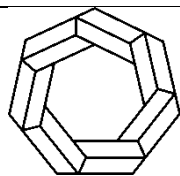


# 2017 WMTTC

## 青年组个人赛第一轮

### Advanced Level Individual Round 1

1. 已知  $\sqrt{2}$  介于  $\frac{n+4}{n+2}$  与  $\frac{n+3}{n+1}$  之间, 求正整数  $n$  的值.
2. 已知函数  $f(x) = |x+1| + |x-1| + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 求  $f(x)$  的最小值.
3. 已知椭圆  $C$  的两个顶点及两个焦点围成一个正方形, 求椭圆  $C$  的离心率.
4. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & 0 \leq a_n < \frac{1}{2}; \\ 2a_n - 1, & \frac{1}{2} \leq a_n < 1. \end{cases}$  若  $a_1 = \frac{2}{7}$ , 求  $a_{2017}$  的值.
5. 已知直角  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{2}$ , 求  $\triangle ABC$  周长的最小值.
6. 设  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 计算:  
$$[\lg 1] + [\lg 2] + [\lg 3] + \cdots + [\lg 2017].$$
7. 求三角函数式  $\tan^2 25^\circ + 2 \tan 25^\circ \tan 40^\circ$  的值.
8. 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = BC = 2$ ,  $AA_1 = 1$ , 求异面直线  $AC_1$  与  $BB_1$  所成的角的余弦值.



# 2017 WMTTC

## 青年组个人赛第二轮

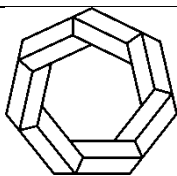
### Advanced Level Individual Round 2

9. 已知正整数数列  $\{x_n\}$  满足  $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ). 若  $x_6 = 61$ , 求质数  $x_1$  的最大值.

10. 点  $M$  是椭圆  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$  上一点, 点  $F$  是椭圆右焦点, 已知点  $P(2, 1)$ , 求  $\sqrt{2} |MF| + |MP|$  的最小值.

11. 一个长方体相邻三个面的面积分别为 12、48、36, 求该长方体外接球的表面积. ( $\pi$  取 3)

12. 求方程  $x^3 + 6x^2 + 5x = y^3 - y + 2$  的整数解  $(x, y)$  的个数.



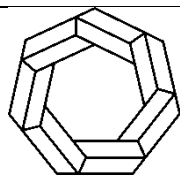
# 2017 WMT

## 青年组个人赛第三轮

### Advanced Level Individual Round 3

13. 点  $P$  是单位圆  $O$  上的一点,  $A_1A_2 \cdots A_{2017}$  是圆  $O$  的内接正 2017 边形, 求  $PA_1^2 + PA_2^2 + \cdots + PA_{2017}^2$ .

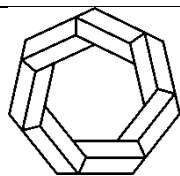
14. 已知  $x_1 = 2$ , 对任意  $n \in \mathbf{N}^*$  都有  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + 1}$ , 求  $\sum_{n=1}^{2017} \frac{x_n}{x_n + 1}$  的整数部分.



**2017 WMTTC**  
**青年组接力赛第一轮**  
**Advanced Level Relay Round 1**

**1-A**

设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $a_1=1$ ，公差  $d=2$ ，  
 $S_{m+2}-S_m=36$ ，求  $m$ 。

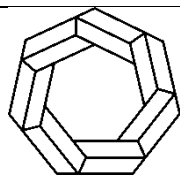


**2017 WMTC**  
**青年组接力赛第一轮**  
**Advanced Level Relay Round 1**

**1-B**

设前面队友传来的答案是  $T$ .

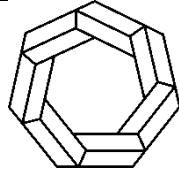
已知正三棱锥的侧面均为面积为  $T$  的直角三角形，求该正三棱锥的外接球的表面积. ( $\pi$  取 3)



**2017 WMTC**  
**青年组接力赛第二轮**  
**Advanced Level Relay Round 2**

**2-A**

求  $|x-2|+|x-1|+|y|=3$  表示的曲线所围成的区域的面积.

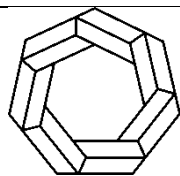


**2017 WMTC**  
**青年组接力赛第二轮**  
**Advanced Level Relay Round 2**

**2-B**

设前面队友传来的答案是  $T$ .

已知点  $P$  是半径为  $T$  的球  $O$  上一点, 过点  $P$  作该球的三条两两垂直的动弦  $PA$ 、 $PB$ 、 $PC$ , 求点  $P$  到平面  $ABC$  的距离的最大值.

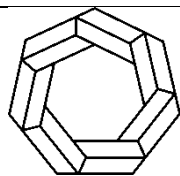


**2017 WMTTC**  
**青年组接力赛第三轮**  
**Advanced Level Relay Round 3**

**3-A**

已知  $ab > 0$ ,  $a + b = ab$ , 求  $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$  的最小值.



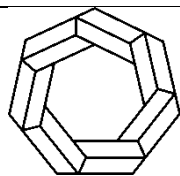


**2017 WMTC**  
**青年组接力赛第三轮**  
**Advanced Level Relay Round 3**

**3-B**

设前面队友传来的答案是 **T**.

在  $xOy$  平面内, 过抛物线  $x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 的焦点  $F$  作倾斜角为  $60^\circ$  的直线交抛物线于  $A, B$  两点, 若  $\triangle OAB$  的面积为 **T**, 求  $p$ .



# 2017 WMTTC

## 青年组团体赛

### Advanced Level Team Round

1. 已知  $a_n = 2n + 1$ , 计算:  $a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - a_4a_5 + \cdots + a_{17}a_{18}$ .

2. 已知函数  $f(x) = \frac{2^{x+2} + 2}{2^x + 1}$ . 当  $x \in [-4, 4]$  时,  $f(x)$  的最大值与最小值分别记作  $M, m$ , 求  $M+m$ .

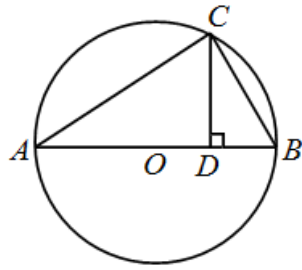
3. 已知长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $E$  是线段  $B_1D_1$  上任意一点, 点  $F$  是  $AE$  上一点, 且  $AF = 2FE$ . 若  $AB=4, AD=2, AA_1=3$ , 求四面体  $BDEF$  的体积.

4. 已知实数  $a, b, c$  满足 
$$\begin{cases} a(4-b) = 4, \\ b(4-c) = 4, \\ c(4-a) = 4. \end{cases}$$
 求  $a+b+c$  的值.

5. 函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  在区间  $[d, d+2]$  上的取值范围为  $[e, e+1]$ , 其中  $a, b, c, d, e$  均为实数, 求  $a$  能取到的最大值.

6. 如图, 已知  $AB$  是  $\odot O$  的直径, 点  $C$  是圆上任意一点, 过点  $C$

作  $CD \perp AB$  于点  $D$ ，求线段  $AD$ ， $BD$ ， $CD$  可以构成锐角三角形的概率。



7. 定义在  $\mathbf{R}$  上的连续函数  $y=f(x)$  满足下列条件：

①对于任意  $x \in \mathbf{R}$ ，都有  $f(x^3) = (f(x))^3$ ；

②对于任意  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ，当  $x_1 \neq x_2$  时，都有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。

求  $[f(-1)+f(1)]^2 - f(0)$  的值。

8. 已知  $a, b, c, d$  是互不相同的正整数，求  $\frac{abcd}{a+b+c+d}$  的最小值。

9. 解方程：
$$\sqrt{x + \frac{x^2}{x+1}} + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = x+1.$$

10. 已知等差数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $S_n$  与  $T_n$ ，且

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+4}{3n-1}, \text{ 求 } \frac{a_6}{b_5}.$$

11. 已知  $ab > 0$ ， $a+2b=1$ ，求  $a+\sqrt{ab}$  的最大值。

12. 已知  $A(-3,0)$ ， $B(-1,-2)$ ， $C$  是椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  上一点，求

$\triangle ABC$  的面积的最小值。

---

13. 将与 190 互质的所有正整数从小到大排成一列，求第 2017 个数.

14. 空间四边形  $ABCD$  中， $AB=1$ ， $BC=2$ ， $CD=3$ ，若  $AC \perp BD$ ，求  $AD$ .

15. 已知函数  $f(x)=x^2-2ax+a^2-1$ ，若关于  $x$  的不等式  $f(f(x)) \leq 0$  的解集中有且只有一个元素，求实数  $a$  的取值范围.

16. 已知抛物线  $C: y^2=2px$  ( $p$  是大于 0 的常数) 的焦点为  $F$ ，直线  $l: 2x-y-6=0$  与抛物线  $C$  交于两点  $A, B$ ，若  $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$ ，求  $p$  的值.

17. 已知点  $P$  是函数  $y=e^x$  的图象上一点，曲线  $y=e^x$  在点  $P$  处的切线  $l$  与直线  $x=1$ ， $x=2$  及  $x$  轴围成一个梯形，求该梯形的面积的最大值.

18. 足球的球皮由  $x$  块相同的正五边形和  $y$  块相同的正六边形皮子缝制而成，已知  $x+y=32$ ，求  $x$  的值.



19. 已知正数  $a, b, \lambda$  使得不等式  $\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} + \lambda\sqrt{\frac{b}{a+b}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$  恒成立,

求  $\lambda$  的最大值.

20. 设  $f(x) = \sum_{k=1}^{2017} \left[ \frac{x}{k!} \right]$ , 其中  $[x]$  表示不超过实数  $x$  的最大整数. 若

方程  $f(x) = n$  ( $1 \leq n \leq 2017$  且  $n$  为偶数) 有解, 求  $n$  的个数.

(注:  $\sum_{k=1}^{2017} \left[ \frac{x}{k!} \right] = \left[ \frac{x}{1!} \right] + \left[ \frac{x}{2!} \right] + \cdots + \left[ \frac{x}{2017!} \right]$ )

# 2017WMTC 青年组 · 参考答案

## 个人赛

题号	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
答案	3	3	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2}{7}$	$2+\sqrt{2}$	4944	1
题号	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>
答案	$\frac{1}{3}$	17	2	507	0	4034	1

## 接力赛

题号	<b>1-B</b>	<b>2-B</b>	<b>3-B</b>
答案	144	$\frac{16}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

## 团体赛

题号	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
答案	687	6	2	6	1	$\sqrt{5}-2$	0	$\frac{12}{5}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1
题号	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
答案	$\frac{2+\sqrt{6}}{4}$	$3-\sqrt{7}$	532 1	$\sqrt{6}$	{-2}	1	$e^{\frac{3}{2}}$	12	2	587

