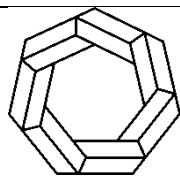


2017 WMTTC

青年组个人赛第一轮

Advanced Level Individual Round 1

1. 已知 $\sqrt{2}$ 介于 $\frac{n+4}{n+2}$ 与 $\frac{n+3}{n+1}$ 之间, 求正整数 n 的值.
2. 已知函数 $f(x) = |x+1| + |x-1| + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ($x \in \mathbf{R}$), 求 $f(x)$ 的最小值.
3. 已知椭圆 C 的两个顶点及两个焦点围成一个正方形, 求椭圆 C 的离心率.
4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & 0 \leq a_n < \frac{1}{2}; \\ 2a_n - 1, & \frac{1}{2} \leq a_n < 1. \end{cases}$ 若 $a_1 = \frac{2}{7}$, 求 a_{2017} 的值.
5. 已知直角 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最小值.
6. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 计算:
$$[\lg 1] + [\lg 2] + [\lg 3] + \cdots + [\lg 2017].$$
7. 求三角函数式 $\tan^2 25^\circ + 2 \tan 25^\circ \tan 40^\circ$ 的值.
8. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2$, $AA_1 = 1$, 求异面直线 AC_1 与 BB_1 所成的角的余弦值.



2017 WMTTC

青年组个人赛第二轮

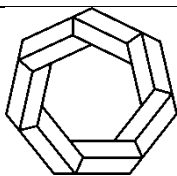
Advanced Level Individual Round 2

9. 已知正整数数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 若 $x_6 = 61$, 求质数 x_1 的最大值.

10. 点 M 是椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上一点, 点 F 是椭圆右焦点, 已知点 $P(2, 1)$, 求 $\sqrt{2} |MF| + |MP|$ 的最小值.

11. 一个长方体相邻三个面的面积分别为 12、48、36, 求该长方体外接球的表面积. (π 取 3)

12. 求方程 $x^3 + 6x^2 + 5x = y^3 - y + 2$ 的整数解 (x, y) 的个数.



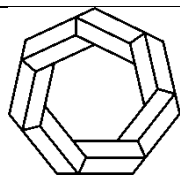
2017 WMT

青年组个人赛第三轮

Advanced Level Individual Round 3

13. 点 P 是单位圆 O 上的一点, $A_1A_2 \cdots A_{2017}$ 是圆 O 的内接正 2017 边形, 求 $PA_1^2 + PA_2^2 + \cdots + PA_{2017}^2$.

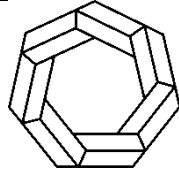
14. 已知 $x_1 = 2$, 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + 1}$, 求 $\sum_{n=1}^{2017} \frac{x_n}{x_n + 1}$ 的整数部分.



2017 WMTC
青年组接力赛第一轮
Advanced Level Relay Round 1

1-A

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_1=1$ ，公差 $d=2$ ，
 $S_{m+2}-S_m=36$ ，求 m 。

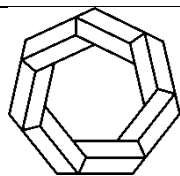


2017 WMTC
青年组接力赛第一轮
Advanced Level Relay Round 1

1-B

设前面队友传来的答案是 T .

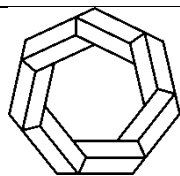
已知正三棱锥的侧面均为面积为 T 的直角三角形，求该正三棱锥的外接球的表面积. (π 取 3)



2017 WMTC
青年组接力赛第二轮
Advanced Level Relay Round 2

2-A

求 $|x-2|+|x-1|+|y|=3$ 表示的曲线所围成的区域的面积.

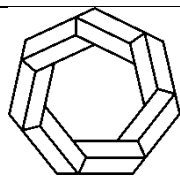


2017 WMTC
青年组接力赛第二轮
Advanced Level Relay Round 2

2-B

设前面队友传来的答案是 T .

已知点 P 是半径为 T 的球 O 上一点, 过点 P 作该球的三条两两垂直的动弦 PA 、 PB 、 PC , 求点 P 到平面 ABC 的距离的最大值.

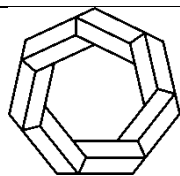


2017 WMTTC
青年组接力赛第三轮
Advanced Level Relay Round 3

3-A

已知 $ab > 0$, $a + b = ab$, 求 $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ 的最小值.

世界数学团体锦标赛

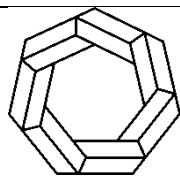


2017 WMTC
青年组接力赛第三轮
Advanced Level Relay Round 3

3-B

设前面队友传来的答案是 **T**.

在 xOy 平面内, 过抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点 F 作倾斜角为 60° 的直线交抛物线于 A, B 两点, 若 $\triangle OAB$ 的面积为 **T**, 求 p .



2017 WMTTC

青年组团体赛

Advanced Level Team Round

1. 已知 $a_n = 2n + 1$, 计算: $a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - a_4a_5 + \cdots + a_{17}a_{18}$.

2. 已知函数 $f(x) = \frac{2^{x+2} + 2}{2^x + 1}$. 当 $x \in [-4, 4]$ 时, $f(x)$ 的最大值与最小值分别记作 M, m , 求 $M+m$.

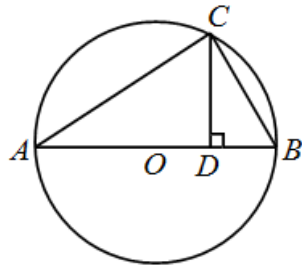
3. 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是线段 B_1D_1 上任意一点, 点 F 是 AE 上一点, 且 $AF = 2FE$. 若 $AB=4, AD=2, AA_1=3$, 求四面体 $BDEF$ 的体积.

4. 已知实数 a, b, c 满足
$$\begin{cases} a(4-b) = 4, \\ b(4-c) = 4, \\ c(4-a) = 4. \end{cases}$$
 求 $a+b+c$ 的值.

5. 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 在区间 $[d, d+2]$ 上的取值范围为 $[e, e+1]$, 其中 a, b, c, d, e 均为实数, 求 a 能取到的最大值.

6. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 是圆上任意一点, 过点 C

作 $CD \perp AB$ 于点 D ，求线段 AD ， BD ， CD 可以构成锐角三角形的概率。



7. 定义在 \mathbf{R} 上的连续函数 $y=f(x)$ 满足下列条件：

①对于任意 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x^3) = (f(x))^3$ ；

②对于任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ，当 $x_1 \neq x_2$ 时，都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。

求 $[f(-1)+f(1)]^2 - f(0)$ 的值。

8. 已知 a, b, c, d 是互不相同的正整数，求 $\frac{abcd}{a+b+c+d}$ 的最小值。

9. 解方程：
$$\sqrt{x + \frac{x^2}{x+1}} + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = x+1.$$

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n ，且

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+4}{3n-1}, \text{ 求 } \frac{a_6}{b_5}.$$

11. 已知 $ab > 0$ ， $a+2b=1$ ，求 $a+\sqrt{ab}$ 的最大值。

12. 已知 $A(-3,0)$ ， $B(-1,-2)$ ， C 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上一点，求

$\triangle ABC$ 的面积的最小值。

13. 将与 190 互质的所有正整数从小到大排成一列，求第 2017 个数.

14. 空间四边形 $ABCD$ 中， $AB=1$ ， $BC=2$ ， $CD=3$ ，若 $AC \perp BD$ ，求 AD .

15. 已知函数 $f(x)=x^2-2ax+a^2-1$ ，若关于 x 的不等式 $f(f(x)) \leq 0$ 的解集中有且只有一个元素，求实数 a 的取值范围.

16. 已知抛物线 $C: y^2=2px$ (p 是大于 0 的常数) 的焦点为 F ，直线 $l: 2x-y-6=0$ 与抛物线 C 交于两点 A, B ，若 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$ ，求 p 的值.

17. 已知点 P 是函数 $y=e^x$ 的图象上一点，曲线 $y=e^x$ 在点 P 处的切线 l 与直线 $x=1$ ， $x=2$ 及 x 轴围成一个梯形，求该梯形的面积的最大值.

18. 足球的球皮由 x 块相同的正五边形和 y 块相同的正六边形皮子缝制而成，已知 $x+y=32$ ，求 x 的值.



19. 已知正数 a, b, λ 使得不等式 $\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} + \lambda\sqrt{\frac{b}{a+b}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 恒成立,

求 λ 的最大值.

20. 设 $f(x) = \sum_{k=1}^{2017} \left[\frac{x}{k!} \right]$, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 若

方程 $f(x) = n$ ($1 \leq n \leq 2017$ 且 n 为偶数) 有解, 求 n 的个数.

(注: $\sum_{k=1}^{2017} \left[\frac{x}{k!} \right] = \left[\frac{x}{1!} \right] + \left[\frac{x}{2!} \right] + \cdots + \left[\frac{x}{2017!} \right]$)

2017WMTC 青年组 · 参考答案

个人赛

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	3	3	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2}{7}$	$2+\sqrt{2}$	4944	1
题号	8	9	10	11	12	13	14
答案	$\frac{1}{3}$	17	2	507	0	4034	1

接力赛

题号	1-B	2-B	3-B
答案	144	$\frac{16}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

团体赛

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	687	6	2	6	1	$\sqrt{5}-2$	0	$\frac{12}{5}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	$\frac{2+\sqrt{6}}{4}$	$3-\sqrt{7}$	532 1	$\sqrt{6}$	{-2}	1	$e^{\frac{3}{2}}$	12	2	587

