

第七届（2016年）WMTC 少年组

个人赛

第1轮

1. 已知实数 a, b, c 满足 $(a+b)^2 + |b+c| + \sqrt{c+a} = 0$, 求 $a+b+c$ 的值.
2. x 是三位自然数, $x \div 3, x \div 5, x \div 7$ 的余数都是 2, 求 x 的个数.□
3. 若一元二次方程 $5x^{m+2n} - 3x^{2m+n} = 2016$ ($m, n > 0$), 求 $m+n$.
4. 平行四边形 $ABCD$ 中, 点 M 在 AB 上, $\frac{AM}{MB} = 2016$, BD 交 MC 于点 N , 求 $\frac{DN}{NB}$.□
5. 有 36 人, 其中 8 人会下围棋. 从中任意抽取两人, 求这两人都会下围棋概率.
6. 已知 $a+b=2000$, 若 a 增加 25%, b 减少 25%, 它们的和增加 15%, 求 $a-b$.
7. 已知 $abc \neq 0$, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(1,0)$, 求 $\frac{a+b}{c}$.
8. $\triangle ABC$ 中, $AB=5, BC=8, AC=11$, $\triangle A'B'C'$ 的三条边长分别为 $A'B'=10, 3x+1, 3y-2$. 若 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 求 $x+y$.

第2轮

9. 若关于 x 的方程 $\sqrt{x^2 + 3x - a} - x = 0$ 无实数解, 求实数 a 的取值范围.
10. 若 $a-b=2, a-c=\frac{1}{2}$, 求 $(b-c)^3 - 3(b-c) + \frac{7}{8}$ 的值.
11. 如图 1, 正方形 $ABCD$ 中, $AB=12, E, F$ 分别是 BC, CD 边的中点, AE, AF 分别交 BD 于点 H, G . 求四边形 $EFGH$ 的面积.

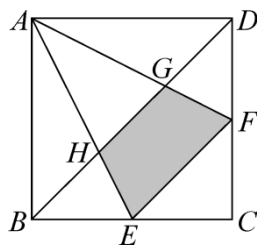


图 1

12. 正 12 边形最短的对角线长 $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, 求它的边长.□

第3轮

13. 已知自然数 m , 若满足 $m = a^2 + b$, 其中 a 是质数, b 是合数, 则称 m 为“HOPE 数”;

若不满足, 则称 m 为“WMTC 数”. 求最大的“WMTC 数”.

14. 如图2, $\odot O$ 的半径 $OA = OB = \sqrt{3}$, 且 $OA \perp OB$. 点 C 是 OB 的延长线上一点, CD 是 $\odot O$ 的切线, D 是切点, AD 交 OB 于点 P , $PD = DC$, 求 OC .

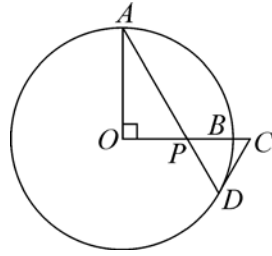


图2

第七届（2016年）WMTC 少年组

接力赛

第1轮

1A

$7^{2017} \div 11$, 求余数.

1B

设前面队友传来的答案是 T.

梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, AC 和 BD 交于点 E , 已知 $S_{\triangle ABE} = \mathbf{T}$, $S_{\triangle CDE} = 24$, 求 $S_{\triangle ADE}$.

第2轮

2A

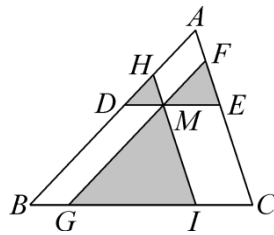
a, b, c, d, e 是整数且 $a < b < c < d < e$, $abcde = -18$, 求 $a(b+c+d)^e$.

2B

设前面队友传来的答案是 T.

如图, 过 $\triangle ABC$ 内一点 M 分别作三条边的平行线, 与各边分别交于点 D, E, F, G, H, I .

已知 $S_{\triangle DMH} : S_{\triangle EMF} : S_{\triangle GMI} = 1 : 4 : 9$, $S_{\triangle ABC} = \mathbf{T}$, 求 $S_{\triangle GMI}$.



第3轮

3A

已知 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = \dots = \frac{x_{2016}}{x_{2017}} = \frac{x_{2017}}{x_1}$, 求 $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2015} + x_{2016} + x_{2017}}{x_1 - x_2 + x_3 - \dots + x_{2015} - x_{2016} + x_{2017}}$ 的值.

3B.

设前面队友传来的答案是 T.

正方形 $ABCD$ 中, $AB = \mathbf{T}$, 点 O 是中心, 一个过点 A, O 的圆交边 AD 于点 E , 交边 AB 于点 F , 求 $EA + AF$. □

第七届（2016年）WMTC 少年组

团体赛

1. 已知 $d_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 是正整数, 求不等式 $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 \leq 7$ 有多少个解?

2. 计算: $\sqrt{2016\sqrt{2015\sqrt{2014\sqrt{2013\times 2011+1+1+1+1}}}}$.

3. 已知关于 x 的不等式 $|x-1| + 2|x-2| + 3|x-3| + 4|x-4| + 5|x-5| \leq m$ 有解, 求 m 的最小值.

4. 求 2000 的所有正约数的和.

5. n 是小于 500 的正整数, $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + 2\left[\frac{n}{8}\right] = n$, 求 n 的个数. ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

6. 若 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{100}$, $x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = 1000$, 且 $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} \leq 190$, 求 x_1 的最大值.

7. 若从 1, 2, 3, ..., n 中去掉一个数后的平均数是 $10\frac{3}{19}$, 求去掉的数.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 12$, $AC = 15$, 点 D 在 AB 上, $AD = 3$, 点 E 在 AC 上, $AE = 6$, 点 M, N 分别在线段 DB, EC 上运动, 点 R 是线段 MN 的中点, 求点 R 运动区域的面积. □

9. 已知直线 $y = kx (k > 0)$ 与双曲线 $y = \frac{5}{x}$ 交于点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$, 求 $2x_1y_2 + 5x_2y_1$ 的值.

10. 求 $2^{32} + 1$ 和 $2^{512} + 1$ 的最大公约数.

11. 已知凸 n 边形 $A_1A_2A_3 \dots A_n (n > 5)$ 的所有内角的度数都是 12° 的整数倍, 且

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 = 420^\circ$, 除 $\angle A_1, \angle A_2, \angle A_3, \angle A_4$ 外其余各个角都相等, 求 n .

12. 如图 1, 长方形纸片 $ABCD$, $AB : BC = 3 : 2$. 先将纸片对折得折痕 EF , 再将 AB 折叠到

直线 AE 上, 得折痕为 AP , 其中, 点 P 在 BC 上. 求 $\frac{PB}{AB}$ 的值.

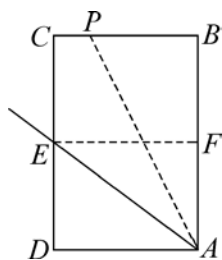


图 1

13. 如图 2, 五棱锥 $P-ABCDE$, 顶点处的五个面角分别是 $15^\circ, 25^\circ, 23^\circ, 37^\circ, 20^\circ$, 点 M, N 都在棱 PA 上, $PM=4, PN=\frac{7}{2}$, 一只昆虫从 M 点出发, 经过棱锥各侧面后, 到达 N 点, 求昆虫从 M 到 N 的最短距离. □

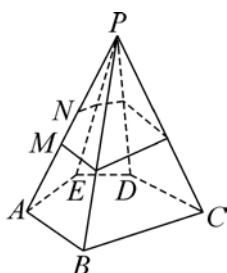


图 2

14. 如图 3, $\angle AOB=30^\circ$, M 是 OA 的中点, 若 $BA+BM=6$, 求 OA 的最大值.

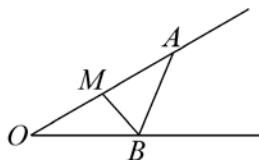


图 3

15. 2016 年 1 月 20 日发现了第 49 个梅森素数 $2^{74207281} - 1$ (可记为 M_{49} 或 $M74207281$), 它是迄今为止所知道的最大素数, 是一个 22338618 位数, 求该素数的末两位数.

16. 如图 4, 正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{3} + 2$, $\angle DAH=30^\circ$, $\odot O$ 分别与 AH, AB, BC 相切. 求阴影部分的面积. (圆周率 π 取 3)

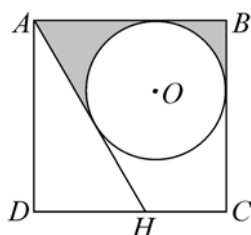


图 4

17. 梯形 $ABCD$ 中, $\angle A=\angle ADC=90^\circ, \angle ABD=15^\circ, \angle C=45^\circ, CD=1$. 求梯形中位线的长. □

18. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边长 a, b 和斜边长 c 都是正整数, 且 $\sqrt{a} + \sqrt{a+b+c} = a$,

求 $a+b-c$ 的值有几个?

19. 正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在边 AB, BC 上, 且 $AE:EB=1:2, BF:FC=1:2$. AF 分别与 DE, DB 相交于点 G, H . 若 $AG=6$, 求 GH .

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 以点 $A(10, 8)$ 为圆心的 $\odot A$ 与 y 轴相切, 点 B 的坐标是 $(0, 16)$, 点 C 是 $\odot A$ 上的任一点, 点 M 是线段 BC 的中点, 求线段 OM 的取值范围.