第七届（2016年）WMTC青年组

个人赛

第1轮

1. 设集合 A={1，2}，$A\cup B=\{1，2，3，4\}$，求 B 的个数.

2. 从1到10的这10个自然数中任取3个数，求其中只有一个数是平方数的概率.

3. 已知 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}+\cos^2\dfrac{3x}{2}$，求$|f(x)|$的最小正周期.

4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，求$a_{2017}$.

5. 球 O_1 和球 O_2 外切，半径分别是2和5，平面 α 切球 O_1，O_2 分别于点 A，B，求 AB.

6. 已知$2^a=3^b=5^c$=30，求$\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$.

7. 在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $B=\dfrac{\pi}{3}$，△ABC 的面积为$\sqrt{3}$. 当 $a+c$ 取得最小值时，求b.

8. 半径为1和4的两圆外切，且在公切线 l 的同侧，求与两圆和切线 l 都相切的圆的半径的最小值.

第2轮

9. 已知$3^a+a^3=123$，求$\left[\log_2 a\right]$的值.　　（注：[n]表示不超过 n 的最大整数）

10. 在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=2$，$a_2=-1$，$a_{n+2}=\left|a_{n+1}-a_n\right|$，$n$=1，2，⋯.求$a_{2016}$.

11. 已知 tanα，tanβ 是方程$x^2+3\sqrt{3}x+4=0$的两根，若 α，$\beta\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，求 $\alpha+\beta$.

12. 扇形 AOB 中，$OA=OB=l$，∠AOB=90°，扇形 CPD 中，$PC=PD=l$，∠CPD=180°. 将这两个扇形卷成圆锥，求圆锥 O 和圆锥 P 的高的比值.

第3轮

13. 从正七边形的顶点中任取3个，组成一个三角形，求该三角形覆盖七边形中心的概率.

14. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$两焦点分别为$F_1,F_2$,过左焦点$F_1$作倾斜角为$30°$的直线，与椭圆在第一象限的交点为 P，若$\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，求椭圆的离心率.

第七届（2016年）WMTC青年组

接力赛

第1轮

1A

计算：$\sin\dfrac{3\pi}{10}-\sin\dfrac{\pi}{10}$.

1B

设前面队友传来的答案是T.

若 $x\cdot\log_{27}8=\mathrm{T}$，求 $[2^{x}+2^{-x}]$.　　　　（注：$[n]$表示不超过 n 的最大整数）

第2轮

2A

已知 $x+\dfrac{1}{x}=-1$（x 是复数），求 $x^{2016}+\dfrac{2016}{x^{2016}}$.

2B

设前面队友传来的答案是T.

如果点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，…，$P_n(x_n, y_n)$都在抛物线 $y^2=4x$ 上，F 是抛物线的焦点，若 x_1，x_2，…，x_{2017}成等差数列，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{2017}=\mathrm{T}$，求 $|P_1F|+|P_{2017}F|$.

第3轮

3A

已知集合$\{a, b, c\}\subseteq\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，求 $\dfrac{abc}{a+b+c}$ 的最小值.

3B

设前面队友传来的答案是T.

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $\dfrac{S_{2019}}{2019}-\dfrac{S_{2017}}{2017}=a_1=\mathrm{T}$.令 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前2017项和.

第七届（2016年）WMTC青年组

团体赛

1. 对一切实数 x， $f(x)=(x^2+x)(x^2+ax+b)$ 均满足 $f(x)=f(2-x)$，求 $f(x)$ 的最小值.

2. 求集合{1，2，3，…，16}的所有子集中的元素之和.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，求 $|x|+|y|+|x-2|\le 4$ 围成的区域的面积.

4. 正八边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的边长为1，求△$A_1A_3A_6$ 的面积.

5. 已知点 P 是四面体 $ABCD$ 内的任意一点，它到平面 ABC，平面 BCD，平面 CDA，平面 DAB 的距离分别是 r_1，r_2，r_3，r_4，点 D，A，B，C 到对面的距离分别是 h_1，h_2，h_3，h_4，求 $\frac{r_1}{h_1}+\frac{r_2}{h_2}+\frac{r_3}{h_3}+\frac{r_4}{h_4}$.

6. 在△ABC 中，角 A， B， C 所对的边分别为 a， b， c.若 $A=54°$，$(a^2-c^2)^2=b^2(2c^2-b^2)$，求 B 的度数.

7. 已知 $x>0$，解方程 $\sqrt[3]{9+x}+\sqrt[3]{26-x}=5$.

8. 已知 a，$b>0$，求 $\dfrac{a^2+b^2+ab+1}{a+b}$ 的最小值.

9. 用若干个棱长为1的正方体拼成一个几何体，它的主视图，侧视图都是如图1所示，求这个几何体体积的最小值.

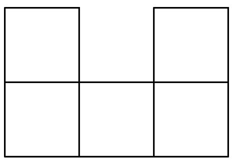

图1

10. 已知点 $P(a，b)$关于直线 l 的对称点为 $P'(b+1，a-1)$，求直线 l 被圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=20$ 截得的弦长.

11. 如图2，在△ABC 中，点 D，E 分别在边 BC，AC 上，且 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$，$AD$ 与 BE 交于点 F，若 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AD}$，求 λ 的值.

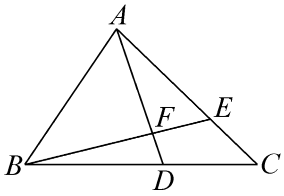

图 2

12. 锐角△ABC 的面积为 1，外接圆的半径为 1，A'，B'，C'分别是边 BC，AC，AB 上的点，求△$A'B'C'$周长的最小值.

13. $\odot C_1$ 和$\odot C_2$ 的半径分别为 3 和 4，圆心距为 10. 其中，$\odot C_1$ 和$\odot C_2$ 都分别在公切线 t_1, t_2 的同侧，在公切线 s 的异侧. s 与 $t_1, \odot C_1, \odot C_2, t_2$ 的交点依次为 A, B, C, D .求$|AB|-|CD|$.

14. 如图 3，已知 A，B 是抛物线 $y^2=4x$ 上两点，O 是坐标原点，且满足$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.过点 O 作 $OM\perp AB$ 于点 M，AB 交 x 轴于点 C，求△MOC 面积的最大值.

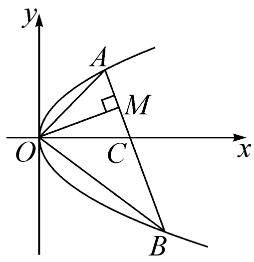

图 3

15. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=[\frac{2n+3}{5}](n\in N^*)$，求数列$\{a_n\}$的前 2017 项和.

（注：$[x]$表示不超过 x 的最大整数）

16. 从一个边长为 1 的等边三角形的中心、各边中点及三个顶点，这 7 个点中任取两个点，求这两点间的距离不小于$\frac{1}{2}$的概率.

17. 求体积为$\frac{\sqrt{2}}{3}$的正四棱锥的内切球体积的最大值.

18. 数列$\{u_n\}$中，$u_0=4$，$u_1=5$，$u_n=2u_{n-1}+3u_{n-2}(n\geq 2)$，求$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

19. 如图 4，在△ABC 中，$CB=4$，$CA=2$，$\angle ACB=120°$，平面 ABC 外一点 P 满足 $PA=PC$，D 在线段 AB 上，$DA=DP$.当 D 在线段 AB 上运动时，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值.

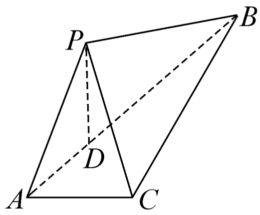

图 4

20. 如图 5，在直角坐标系 xOy 中，F_1，F_2 是双曲线 C:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的两个焦点，点 P 是双曲线 C 右支上一点，且点 P 处的切线 PM 交 x 轴于点 M.作 $OT//PM$，交直线 PF_1 于点 T.若 $PT=\dfrac{1}{3}F_1F_2$，求 C 的离心率.

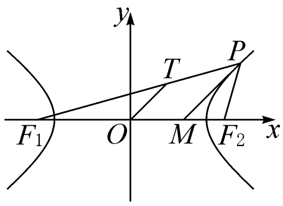

图 5