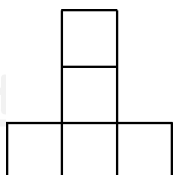


2015 World Mathematics Team Championship

青年组个人赛第一轮 (10 分钟)

Advanced Level Individual Round 1 (10 Minutes)

1. 用若干个棱长为 1 的正方体拼成一个几何体，它的主视图，侧视图都是如下图所示，求这个几何体的体积的最小值。



2. 计算 $\log_{\sqrt{2}}(2^{\log_7^3} \times 2^{2 \cdot \log_7^9})^{2 \cdot \log_3^7}$ 。

3. 求函数 $y = 4\cos^2 x - 4\cos x - 6$ 的最小值。

4. 已知 $2^a + a^3 = 47$ ，求 $[a]$ 。（ $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数）

5. 已知 $\tan \alpha = \sqrt{2}$ ，求 $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha$ 。

6. 若 T 是九位的自然数， n 是正整数，并且 $3T + 1 = 10^n$ ，求 T 的数字和。

7. 若 $0^\circ \leq x^\circ < 360^\circ$ ，并且 $\sqrt{3} \sin 20^\circ = \cos 40^\circ + \sin x^\circ$ ，求 x 。

8. $\triangle ABC$ 中， $\cos A = \frac{1}{3}$ ， $BC = \sqrt{6}$ ，求此三角形外接圆的弦长的最大值。

2015 世界数学团体锦标赛

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，若 $-1 \leq a_2 \leq 2$ ， $3 \leq a_5 \leq 5$ ，求 a_{10} 的取值范围。

World Mathematics Team Championship 2015

10. 边长和体对角线都是自然数的长方体的体积是 220，求体对角线的长。

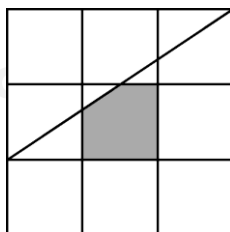
2015 世界数学团体锦标赛

11. 方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 有几个实数解？

World Mathematics Team Championship 2015

12. 从空间一点出发作四条射线，若它们两两所夹的角都是 α ，求 $\cos \alpha$ 。

13. 如图，求 3×3 的网格图中的阴影部分的面积。



World Mathematics Team Championship 2015

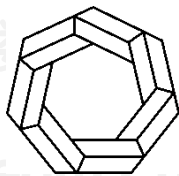
2015 世界数学团体锦标赛

14. 已知 $a, b, c, d > 0$ ， $a + b + c + d = 6$ ，求 $ab + bc + cd + da$ 的最大值。

World Mathematics Team Championship 2015

2015 世界数学团体锦标赛

World Mathematics Team Championship 2015



2015 World Mathematics Team Championship

青年组个人赛第二轮 (10 分钟)

Advanced Level Individual Round 2 (10 Minutes)

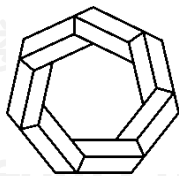
15. 已知不等式 $\sqrt{5-x^2} > ax + \frac{5}{3}$ 的解集是 $(-2, 1)$ ，求实数 a 的值。

16. 已知 $f(x) = \frac{2^{x+2} + 2^{1-x}}{2^x + 2^{-x}}$ ，若 $f(t) = 3.5$ ，求 $f(-t)$ 的值。

17. 已知 $y = f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数，且函数 $f(x-2) = f(x+2)$ ，当 $x \in [-2, 0]$ 时，

$f(x) = x + 2$ ，求 $f(5)$ 的值。

18. 已知 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$ ，若 $f(\ln x) = x^2 - 1$ ，求 $f^{-1}(3)$ 的值。



2015 World Mathematics Team Championship

青年组个人赛第三轮 (10 分钟)

Advanced Level Individual Round 3 (10 Minutes)

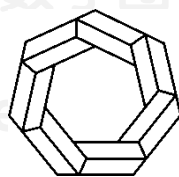
19. 已知球 O 的直径 $PC = 2$, 点 A, B 在球面上, 若 $AB = \sqrt{2}$, $\angle APC = \angle BPC = 45^\circ$, 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积。

20. 已知 $a_n = \sqrt{5 \times 6} + \sqrt{7 \times 8} + \dots + \sqrt{(2n+3)(2n+4)}$, $b_n = \left[\frac{a_n}{n} \right]$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 求满足 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n \leq 5455$ 的所有正整数 n 的和。

青年组个人赛答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	20	-7	3	$\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$	27	190 或 350	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\frac{14}{3} \leq a_{10} \leq 15$	15
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{12}$	9	$\frac{1}{3}$	2.5	1	$\ln 2$	$\frac{1}{3}$	5050

2015 世界数学团体锦标赛



4[#]

**2015 World Mathematics Team
Championship**

青年组接力赛第一轮（8分钟）

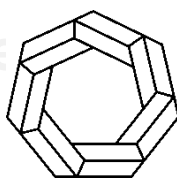
Advanced Level Relay Round 1 (8 Minutes)

1-A

求 $\left\lceil \frac{2016! + 2013!}{2015! + 2014!} \right\rceil$ 。 ($[n]$ 表示不超过 n 的最大的整数)

2015 世界数学团体锦标赛

World Mathematics Team Championship



4[#]

**2015 World Mathematics Team
Championship**

青年组接力赛第一轮 (8 分钟)

Advanced Level Relay Round 1 (8 Minutes)

1-B

设前面队友传来的答案是 T 。

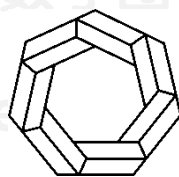
已知 a, b, T, c, d 是由小到大排列的五个不同的正整数，它们的平均数是 T ，求 d 的最大值。

2015 世界数学团体锦标赛

World Mathematics Team Championship 2015

2015 世界数学团体锦标赛

5#



**2015 World Mathematics Team
Championship**

青年组接力赛第二轮（8分钟）

Advanced Level Relay Round 2 (8 Minutes)

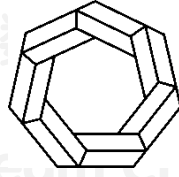
2-A

已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 7, a_2 = 29, a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n, n \in \mathbf{N}_+,$$

求 a_{2015} 的个位数字。

2015 世界数学团体锦标赛



5#

World Mathematics Team Championship 2015

**2015 World Mathematics Team
Championship**

青年组接力赛第二轮 (8 分钟)

Advanced Level Relay Round 2 (8 Minutes)

World Mathematics Team Championship 2015

2-B

2015 世界数学团体锦标赛

World Mathematics Team Championship 2015

设前面队友传来的答案是 T 。

若长方体外接球的体积是 $8\pi\sqrt{2T}$ ，求此长方体表面积的最大值。

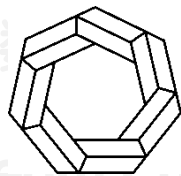
2015 世界数学团体锦标赛

World Mathematics Team Championship 2015

2015 世界数学团体锦标赛

World Mathematics Team Championship 2015

2015 世界数学团体锦标赛



6#

World Mathematics Team Championship 2015

**2015 World Mathematics Team
Championship**

青年组接力赛第三轮 (8 分钟)

Advanced Level Relay Round 3 (8 Minutes)

World Mathematics Team Championship 2015

3-A

2015 世界数学团体锦标赛

World Mathematics Team Championship 2015

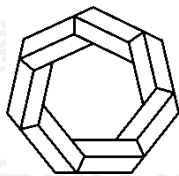
求方程 $2x^3 - 10x^2 + 7x + 10 = 0$ 的所有实根之和。

2015 世界数学团体锦标赛

World Mathematics Team Championship 2015

2015 世界数学团体锦标赛

World Mathematics Team Championship 2015



**2015 World Mathematics Team
Championship**

青年组接力赛第三轮 (8 分钟)

Advanced Level Relay Round 3 (8 Minutes)

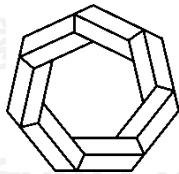
3-B

设前面队友传来的答案是 T 。

已知边长为整数的矩形的面积 $S = T^2 - 1$ ，求此矩形的对角线的长的最小值。

青年组接力赛答案

1-B	2-B	3-B
6041	48	$2\sqrt{13}$



2015 World Mathematics Team Championship

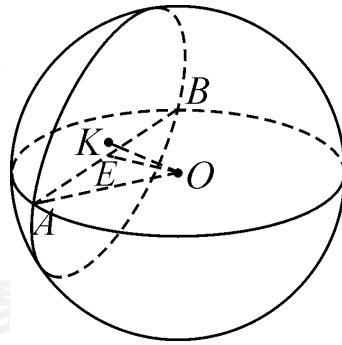
青年组团体赛 (40 分钟)

Advanced Level Team Round (40 Minutes)

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 求 a_{2016} .
2. 一个三位自然数 \overline{abc} , 如果 $a+c=2b$, 我们就称 \overline{abc} 是“算术排列数”。求“算术排列数”的个数。
3. 已知 x 是非零的自然数, 且 x^2-4 , $2x$, $x+1$ 表示某个三角形三条边的长, 求此三角形的周长的值。
4. 设 M 是整数集的一个非空子集, 对于 $k \in M$, 如果 $k-1 \notin M$ 且 $k+1 \notin M$, 那么 k 是集合 M 的一个“孤立元”。若 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则 M 的所有子集中, 只有一个“孤立元”的集合有多少个?
5. 求函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin 2x + 4 \sin x + 8\sqrt{3} \cos x$ 的最大值。
6. 从奇偶数各占一半的 n 个数中任取 2 个, 设和为偶数的概率为 P , 求满足 $P \leq \frac{99}{200}$ 的最大正整数 n 。
7. 求函数 $y = 3x^2 - 7x + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 3x - 1}$ 的最小值。
8. 已知方程 $x^3 + x - 4 = 0$ 的实数根为 α , 方程 $x + \sqrt[3]{x} - 4 = 0$ 的实数根为 β , 求 $\alpha + \beta$ 的值。

2015 世界数学团体锦标赛

9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 、 T_n ，且 $\frac{2S_n}{3T_n} = \frac{4n+19}{2n+2}$ ，求 $\frac{8a_n}{3b_n}$ 的值是质数的个数。
10. 已知圆 O 和圆 K 分别是球 O 的大圆和小圆，其公共弦 AB 的长等于球 O 的半径， $OK = \frac{3}{2}$ ，且圆 O 和圆 K 所在的平面所成的二面角为 60° ，求球 O 的内接正方体的表面积。



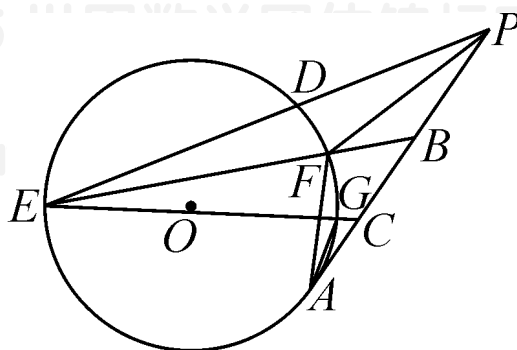
11. 若 $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 1$ ，且 a^2b, ab^2, a 既成等差数列又成等比数列，求 $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值。
12. 已知 $a > 3b > 0$ ，求 $\frac{3a + 8a^2b - 16ab^2}{8b^2 - 4ab}$ 的最大值。
13. 已知直线 $x = m (1 \leq m \leq 3)$ 与函数 $f(x) = \log_2(x+1) + 1$ 和 $g(x) = 4 - 2^{x-1}$ 的图象分别交于点 M, N ，求 $|MN|$ 的取值范围。
14. 若在函数 $f(x) = -\sin \frac{\pi}{2}x (x \leq 0)$ 的图象上，恰有 n 个关于 y 轴对称的点在函数 $g(x) = ||x-1|-1| (x \geq 0)$ 的图象上，求 n 的值。
15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = n (n \in \mathbf{N}_+)$ ，且其前 n 项和 $S_n = 2550$ ，求 n 。

16. $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2, BC=4, \angle ABC$ 的平分线 $BD = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径。

17. 已知 $a, b, c \in \mathbf{N}_+$, c 为质数, $3b-1$ 为合数, b 与 $2ab$ 是完全平方数, 且 $8a+2b+3c \leq 45$, 求 abc 的所有可能值的和。

18. $\triangle ABC$ 中, $\tan B = 4 \tan C, b^2 - c^2 = 12$, 求 $\triangle ABC$ 外接圆面积最小时的内切圆的半径。

19. 如图, B 是 $\odot O$ 的切线 PA 的中点, A 为切点, C 在 PA 上, PDE, BFE, CGE 是 $\odot O$ 的割线, $\angle FAG = \angle FPB$, 若 $PA = EC = 6, ED = 5$, 求 BE 的长。



20. 正四面体 $V-ABC$ 中, E, F, G, H 是棱 AB, AC, VB, VC 的中点, 记过点 A, G, H 的平面和过点 V, E, F 的平面所成的角是 α , 求 $\sin \alpha$ 。

青年组团体赛答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{2}$	45	25, 15	13	17	100	-2	4	3	32
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\frac{1}{2}$	$-4\sqrt{3}$	[0,3]	3	100	$3-\sqrt{5}$	108	$3-\sqrt{5}$	$4\sqrt{3}$	$\frac{6\sqrt{2}}{11}$